$SU(3)_c$ – Bemerkungen zur Farbsymmetrie

Andreas Mielke*
Institut für Theoretische Physik, Universität Heidelberg

Sommersemester 2000

1 Einführung

Symmetrien spielen für das Verständnis vieler Phänomene in der Physik eine grundlegende Rolle. Mit Symmetrien sind in der Regel Erhaltungssätze verbunden (Noether-Theorem), die auf einfache Weise Einsicht in physikalische Phänomene liefern. Einfache Symmetrien und die sich daraus ergebenden Erhaltungsgrößen sind

- Homogenität des Raumes – Impulserhaltung
- Isotropie des Raumes – Drehimpulserhaltung
- Homogenität der Zeit – Energieerhaltung

In der Hochenergiephysik kennt man Symmetrien, die nicht vollständig gelten. Ein typisches Beispiel ist die Isospin-Symmetrie: Berücksichtigt man nur die starke Wechselwirkung können Proton und Neutron als zwei Zustände eines Teilchens (Nukleon) betrachtet werden, die sich nur durch eine Quantenzahl (Isospin) unterscheiden. Das ist ganz analog zum Spin: Elektronen mit Spin $\uparrow$ und Spin $\downarrow$ unterscheiden sich auch nur durch eine Quantenzahl. Ebenso wie zum Beispiel Vielelektronensysteme (*e.g.* ein Atom) unter Rotationen im Raum der Spins invariant sind (wenn man Spin-Bahn-Kopplung vernachlässigt), sind Vielnukleonensysteme unter Rotationen im Raum der Isospins invariant, wenn man nur die starke Wechselwirkung berücksichtigt. Rotationen im Raum der Spins beschreibt man durch die Gruppe $SU(2)$, das sind die speziellen (d.h. die Determinante ist 1) unitären Transformationen in zwei Dimensionen. Da der Spin nur zwei Einstellungen hat, ist der Raum zweidimensional. Für den Isospin gibt es auch nur zwei Einstellungen, jedes Nukleon ist entweder ein Neutron oder ein Proton. Daher ist die Isospin-Gruppe auch eine $SU(2)$. Sie ist allerdings nicht exakt: Berücksichtigt man die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung, dann ist die Isospin-Symmetrie gebrochen. Trotzdem kann es nützlich sein, diese Symmetrie zu diskutieren, speziell bei hohen Energien oder kurzen Zeiten.

Neben der Isospin-Symmetrie gibt es eine Reihe weiterer Symmetrien in der Hochenergiephysik. Im Rahmen der starken Wechselwirkung kann man auch u-, d-, und s-Quark als equivalent betrachten, die zugehörige Symmetrie ist dann eine $SU(3)$-Symmetrie. Die $SU(2)$-Isospin-Symmetrie ist eine Untergruppe dieser $SU(3)$-Symmetrie.

Quarks haben einen weiteren Freiheitsgrad, den man als Farbe bezeichnet. Die Farben der Quarks bezeichnet man mit rot (r), blau (b) und grün (g). Ebenso wie der Spin der Elektronen ist die Farbe ein innerer Freiheitsgrad, der allerdings drei verschiedene Einstellungen hat und nicht zwei wie beim Spin.

*email: mielke@tphys.uni-heidelberg.de

Die Farben der Antiteilchen sind Anti-Farben, man bezeichnet sie mit $\bar{r}$, $\bar{b}$ und $\bar{g}$. Ein wesentlicher Punkt ist, daß in der Natur nur weiße Objekte, also Singuletts beobachtet werden. Was diese Aussage bedeutet, wird weiter unten deutlich. Man bezeichnet die Farbsymmetrie der Quarks als $SU(3)_c$, es handelt sich also um spezielle unitäre Transformationen in drei Dimensionen. Der Index c bedeutet *colour*. Nach allem, was wir wissen, ist diese Symmetrie exakt. Bevor wir diese Gruppe diskutieren, wollen wir uns zunächst einige Fakten zur $SU(2)$-Spinsymmetrie in Erinnerung rufen.

2 $SU(2)$-Symmetrie

Eine Algebra von Operatoren oder Matrizen, die die Relationen

$$[J_j, J_k] = i\varepsilon_{jkl} J_l, \quad j,k,l \in \{1,2,3\}$$

erfüllt, nennt man eine $SU(2)$-Algebra. Eine Darstellung dieser Algebra bilden zum Beispiel die Paulimatrizen. Setzt man

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dann rechnet man schnell nach, daß die Vertauschungsrelationen erfüllt sind. Betrachtet man nun Ausdrücke der Form

$$U = \exp(-i\sum_{j=1}^{3} \phi_j J_j)$$

so sind dies gerade die speziellen unitären Transformationen in zwei Dimensionen. Diese Operatoren bilden also die Gruppe $SU(2)$. In d (komplexen) Dimenionen kann man unitäre Transformationen durch d^2 Parameter ausdrücken. Berücksichtigt man, daß die Determinate 1 sein soll, hat man $d^2 - 1$ Parameter, in zwei Dimensionen also 3. Setzt man für die J_j eine Darstellung ein, zum Beispiel die Paulimatrizen, so erhhält man eine Darstellung der Gruppe. Die J_j werden Erzeuger der Gruppe $SU(2)$ genannt. Ist ein Hamiltonoperator unter den Transformationen einer Gruppe invariant, dann vertauscht er mit den Erzeugern, also im Fall der $SU(2)$-Symmetrie mit den Operatoren J_j. Da $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^3$ und eines der J_j miteinander vertauschen, kann man den Hamiltonoperator gleichzeitig mit J^2 und zum Beispiel J_3 diagonalisieren. Die Symmetrie liefert also Erhaltungsgrößen (gute Quantenzahlen).

3 Die Gruppe $SU(3)$

In Analogie zur $SU(2)$ beschreibt die $SU(3)$ unitäre Transformationen in drei Dimensionen. Diese Transformationen können durch $3^2 - 1 = 8$ Parameter parametrisiert werden. Wir benötigen also 8 Erzeugende J_j. Wir betrachten als einfachstes Beispiel eine Darstellung dieser Erzeugenden durch 3×3-Matrizen. Die Matrizen müssen hermitesch und spurlos sein (damit die Transformation unitär und die Determinante 1 ist, die Paulimatrizen erfüllen diese Kriterien auch). Ähnlich wie bei den Paulimatrizen gibt es eine Konvention für diese Erzeugenden: $J_j = \frac{1}{2}\lambda_j$ mit

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die entsprechende Darstellung der Gruppe $SU(3)$ ist $\exp(-\frac{i}{2}\sum_j \phi_j \lambda_j)$. Andere Darstellungen erhält man, indem man andere 8 Erzeugenden findet, die die gleichen Vertauschungsrelationen erfüllen wie die J_j. Ist ein Hamiltonoperator invariant unter der $SU(3)$ Symmtrie, dann muß er mit allen Erzeugenden J_j vertauschen. $J^2 = \sum_j J_j^2$ und zwei der Erzeugenden vertauschen miteinander, liefern also Erhaltungsgrößen. Man wählt meist J_3 und J_8, beide sind in der obigen Darstellung diagonal. Statt J_3 und J_8 bezeichnet man die zugehörigen guten Quantenzahlen mit $T_3 = J_3$, $Y = \frac{2}{\sqrt{3}} J_8$. In der $SU(3)$-Symmetrie der starken Wechselwirkung bezeichnet man T_3 als Isospin und Y als Hyperladung.

4 Die Farbsymmetrie

Wir haben oben schon erwähnt, daß die Quarks einen inneren Freiheitsgrad haben, den man Farbe nennt. Es gibt drei Farben, r, b und g. Die unitären Transformationen in diesem dreidimensionalen Raum bilden eine $SU(3)$-Symmetrie, die als $SU(3)_c$ bezeichnet wird. Die entsprechenden guten Quantenzahlen bezeichnet man mit T_{3c} und Y_c. In der Natur werden nur Zustände ψ beobachtet, die invariant unter den Transformationen der Farbsymmetrie sind. Für diese Zustände gilt als $J_j \psi = 0$.

Den Spinanteil einer Wellenfunktion aus N Elektronen kann man in der Form $\uparrow^{N_\uparrow} \downarrow^{N_\downarrow}$ schreiben und meint damit einen Zustand mit $N_\uparrow$ Elektronen mit Spin $\uparrow$ und $N_\downarrow$ Elektronen mit Spin $\downarrow$. Diese Notation ist natürlich nicht eindeutig! Für $N_\uparrow = N_\downarrow = 1$ könnte $\uparrow^{N_\uparrow} \downarrow^{N_\downarrow}$ ein Singulett oder ein Triplett bezeichnen. Eindeutig ist aber die Quantenzahl $J_3 = \frac{1}{2}(N_\uparrow - N_\downarrow)$.

Den Farbanteil der Wellenfunktion von mehreren Quarks und Antiquarks kann man analog in der Form

$$r^{n_r} b^{n_b} g^{n_g} \bar{r}^{n_{\bar{r}}} \bar{b}^{n_{\bar{b}}} \bar{g}^{n_{\bar{g}}}$$

schreiben, auch dies ist nicht eindeutig!. Für einen solchen Zustand gilt dann (siehe die obige Darstellung)

$$T_{3c} = \frac{1}{2}(n_r - n_b - n_{\bar{r}} + n_{\bar{b}})$$

und

$$Y_c = \frac{1}{3}(n_r + n_b - 2n_g - n_{\bar{r}} - n_{\bar{b}} + 2n_{\bar{g}})$$

Für beobachtete Zustände ist $J_j \psi = 0$, also $T_{3c} = Y_c = 0$. Zusätzlich zu diesen beiden Bedingungen gilt natürlich auch $J^2 \psi = 0$. In vielen Fällen genügt es aber, T_{3c} und Y_c zu betrachten.