Fouriertransformation.
Mathematische Ergänzungen zur Physik III.

Andreas Mielke*
Institut für Theoretische Physik, Ruprecht–Karls–Universität,
Philosophenweg 19, D-69120 Heidelberg, F.R. Germany

Sommersemester 1999

Einleitung

Die Fouriertransformation kann auf unterschiedlichen Funktionenräumen definiert werden. Je nach dem, welchen Funktionenraum man betrachtet, sind die Voraussetzungen an die Funktionen, für die eine Fouriertransformierte existiert, unterschiedlich. Außerdem kann aus der Fouriertransformierten unter geeigneten Voraussetzungen die ursprüngliche Funktion rekonstruiert werden. Bezeichnet man mit $\tilde{f}(k)$ die Fouriertransformierte von $f(x)$, so gilt

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k)\exp(ikx)$$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\exp(-ikx)$$

Eine Bedingung ist, daß $f(x)$ hinreichend schnell abfällt. Meist fordert man $\int_{-\infty}^{\infty} dx|f(x)| < \infty$. Zudem müssen geeignete Stetigkeitsbedingungen erfüllt sein. $f(x)$ muß stückweise stetig differenzierbar sein, und an einer Unstetigkeitsstelle x_0 muß $f(x_0) = \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{2}(f(x_0+\varepsilon)+f(x_0-\varepsilon))$ gelten. Tabellen von Funktionen und ihren Fouriertransformierten findet man in vielen Handbüchern. Allerdings ist zu beachten, daß der Faktor $(2\pi)^{-1}$ nicht immer an der Stelle steht, die ich oben verwende. Daher muß man bei der Verwendung entsprechender Tabellen auf die Definition achten.

Rechenregeln

Im folgenden bezeichne ich mit $\tilde{f}(k)$, $\tilde{g}(k)$ etc. die Fouriertransformierten von $f(x)$, $g(x)$ etc.

1. Die Fouriertransformation ist linear: Die Fouriertransformierte von $af(x)+bg(x)$ ist $a\tilde{f}(k)+b\tilde{g}(k)$.
2. Sei $f_c(x) = f(x+c)$, dann ist $\tilde{f}_c(k) = exp(ikc)\tilde{f}(k)$.
3. Sei $f_a(x) = f(ax)$, dann ist $\tilde{f}_a(k) = \frac{1}{a}\tilde{f}(\frac{k}{a})$.
4. Sei $f_q(x) = f(x)\exp(iqx)$, dann ist $\tilde{f}_q(k) = f(k-q)$
5. Die Fouriertransformierte von $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$ ist $\tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$.

*E–mail: mielke@tphys.uni-heidelberg.de

6. Die Fouriertransformierte der n-ten Ableitung $f^{(n)}(x)$ ist $(ik)^n \tilde{f}(k)$.

7. Die Fouriertransformierte von $xf(x)$ ist $i\frac{d\tilde{f}}{dk}$.

Bei den letzten beiden Regeln ist darauf zu achten, daß in Fällen, in denen $f(x)$ zum Beispiel Sprungstellen enthält, die Ableitung δ-Funktionen enthält.

Beipiele für Funktionen und ihre Fouriertransformierten

$f(x)$	$\tilde{f}(k)$
1	$2\pi\delta(k)$
$\frac{1}{x}$	$\pi i \operatorname{sign}(k)$
$\frac{1}{\lvert x\rvert}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{\lvert k\rvert}$
$\frac{1}{\lvert x\rvert^a}, \quad 0 < a < 1$	$\frac{2\Gamma(1-a)\sin(a\pi/2)}{\lvert k\rvert^{1-a}}$
$\exp(iax)$	$2\pi\delta(k+a)$
$\exp(-a\lvert x\rvert)$	$\frac{2a}{a^2+k^2}$
$\exp(-a^2x^2)$	$\sqrt{\pi/a}\exp(-k^2/(4a^2))$

Sinus und Cosinus Fouriertransformationen, Laplacetransformationen

Oft findet man in Anwendungen die Sinus und Cosinus Fouriertransformationen

$$\tilde{f}_c(k) = \int_0^\infty dx\, f(x)\cos(kx)$$

$$\tilde{f}_s(k) = \int_0^\infty dx\, f(x)\sin(kx)$$

Die Laplacetransformierte einer Funktion $f(x)$ ist definiert als

$$\bar{f}(z) = \int_0^\infty f(x)\exp(-zx)dx, \quad \Re z > 0$$

Für einige Anwendungen ist es günstiger, mit der Laplacetransformierten zu rechnen. Dies gilt insbesondere bei der Lösung von Differentialgleichungen. Die Laplacetransformierte ist für eine größere Klasse von Funktionen definierbar. Viele der oben angegebenen Rechenregeln für die Fouriertransformierte gelten auch für die Laplacetransformierte.

Die verschiedenen Transformierten können leicht in einander umgerechnet werden.

Anwendungen

Es gibt eine Fülle von Anwendungen der Fouriertransformation in der Physik. Eine wichtige Anwendung tritt bei der Lösung von Differentialgleichungen auf. Wir betrachten als Beispiel eine Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + axf = 0$$

Um sie zu lösen, setzten wir für $f(x)$ die Fourierdarstellung ein. Das liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \left(-k^2 \tilde{f}(k) + ia\frac{d\tilde{f}}{dk}\right) \exp(ikx) = 0$$

und damit

$$-k^2 \tilde{f}(k) + ia\frac{d\tilde{f}}{dk} = 0$$

$$\frac{1}{\tilde{f}}\frac{d\tilde{f}}{dk} = -\frac{i}{a}k^2$$

$$\ln \tilde{f}(k) = -\frac{i}{3a}k^3 + c$$

$$\tilde{f}(k) = C\exp\left(-\frac{i}{3a}k^3\right)$$

Dies ist die Fouriertransformierte einer Besselfunktion. Die Lösung $f(x)$ der Differentialgleichung lautet

$$f(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}\right)$$

Während man diese Lösung kaum erraten kann, läßt sich die Fouriertransformierte ausrechnen. Häufig muß man mit der Lösung einer Differentialgleichung weiterrechnen und kann diese Rechnung auch mit der Fouriertransformierten weiterführen. Das wäre im vorliegenden Fall deutlich einfacher, da die Fouriertransformierte einfach zu berechnen ist und durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann.