Deltafunktion, Eigenschaften und Anwendungen.
Mathematische Ergänzungen zur Physik III.

Andreas Mielke[*]
Institut für Theoretische Physik, Ruprecht–Karls–Universität,
Philosophenweg 19, D-69120 Heidelberg, F.R. Germany

Sommersemester 1999

Definition

Die δ-Funktion ist keine Funktion im eigentlichen Sinn, sondern eine Distribution. Ich gehe im folgenden nicht auf die Theorie der Distributionen ein. Die δ-Funktion ist definiert als diejenige Funktion $\delta(x)$, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0)$$

für jede beliebige Funktion $f(x)$ erfüllt ist. Damit folgt sofort

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0)$$

Faltungen und Fouriertransformierte

Generell ist ein Ausdruck der Form

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy$$

eine Faltung. Die δ-Funktion ist also diejenige Funktion, deren Faltung mit einer beliebigen anderen Funktion $f(x)$ diese Funktion reproduziert. Für die Berechnung von Faltungen spielt die Fouriertransformation eine wichtige Rolle. Seien

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \tilde{f}(k) \exp(ikx)$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \tilde{g}(k) \exp(ikx)$$

die Fourierdarstellungen von $f(x)$ und $g(x)$ und

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, f(x) \exp(-ikx)$$

$$\tilde{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, g(x) \exp(-ikx)$$

[*]E–mail: mielke@tphys.uni-heidelberg.de

die Fouriertransformierten. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx (f*g)(x)\exp(-ikx) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y) g(y)\exp(-ikx) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x) g(y)\exp(-ik(x+y)) \\
&= \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)
\end{aligned}$$

Die Foriertransformierte einer Faltung ist das Produkte der Fouriertransformierten (bei dieser Definition der Fouriertransformierten, bei anderen Definitionen tritt hier noch ein Faktor auf). Setzt man $g(x) = \delta(x)$, so erhält man für die Fouriertransformierte von $\delta(x)$ die Konstante 1.

Darstellungen

Die δ-Funktion kann als Limes einer Funktionenfolge konstruiert werden. Es gilt zum Beispiel

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\exp(-n|x|)$$

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}}\exp(-nx^2)$$

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\delta_n(x)$$

mit $\delta_n(x) = 1$ für $|x| < 1/n$, $\delta_n(x) = 0$ sonst. Es gibt viele weitere Darstellungen der δ-Funktion dieser Form. Jede Funktionenfolge, die hier auftritt, kann fouriertransformiert werden, und der Limes der Fouriertransformierten geht gegen 1. Betrachten wir als Beispiel die erste Funktion

$$f(x) = \frac{n}{2}\exp(-n|x|)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\exp(-ikx) \\
&= \frac{n}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-n|x| - ikx) \\
&= \frac{n}{2}\left[\int_{0}^{\infty} dx \exp(-nx - ikx) + \int_{-\infty}^{0} dx \exp(nx - ikx)\right] \\
&= \frac{n}{2}\left[\frac{1}{n+ik} + \frac{1}{n-ik}\right] \\
&= \frac{n^2}{n^2+k^2}
\end{aligned}$$

was im Limes $n \to \infty$ die 1 ergibt.

Stammfunktion

Die Stammfunktion der δ-Funktion ist die θ-Funktion oder Heaviside-Funktion. Sie ist

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} dx \delta(x)$$

und es gilt $\theta(x) = 0$ für $x < 0$, $\theta(x) = 1$ für $x > 0$. Es gilt also $\theta'(x) = \delta(x)$. Diese Gleichung gilt wieder in dem Sinn, daß diese Terme in einem Integral auftreten:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{b} dx\theta'(x)f(x) &= \theta(x)f(x)|_{-a}^{b} - \int_{-a}^{b} dx\theta(x)f'(x) \\
&= f(b)\theta(b) - f(-a)\theta(-a) - \int_{0}^{b} dx f'(x) \\
&= f(b) - [f(b) - f(0)] = f(0)
\end{aligned}$$

mit $a, b > 0$.

Ableitungen der δ-Funktion

Sei wieder $a, b > 0$. Dann gilt

$$\int_{-a}^{b} dx\delta'(x)f(x) = \delta(x)f(x)|_{-a}^{b} - \int_{-a}^{b} dx\delta(x)f'(x) = -f'(0)$$

und per Iteration

$$\int_{-a}^{b} dx\delta^{(n)}(x)f(x) = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

Anwendungen

- Die Ladungsdichte einer homogen geladenen Kugel mit Radius r_0 im Ursprung ist

  $$\rho_{r_0}(\vec{r}) = \frac{q}{\frac{4\pi}{3}r_0^3}\theta(r_0 - |\vec{r}|)$$

  Im Limes $r_0 \to 0$ erhält man

  $$\rho_0(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})$$

  Hierbei ist die δ-Funktion $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. $\rho_0(\vec{r})$ ist die Ladungsdichte einer Punktladung im Ursprung.

- Betrachten wir ein Teilchen an einer Feder, auf das eine zeitabhängige Kraft $F(t)$ wirkt. Die Bewegungsgleichung ist

  $$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

  Als Kraft betrachte ich einen kurzen Kraftstoß: $F(t) = C/\Delta t$ für $0 < t < \Delta t$, $F(t) = 0$ sonst. Es gilt $\lim_{\Delta t \to 0} F(t) = C\delta(t)$. Für endliches Δt kann man die Bewegungsgleichung mit dem Ansatz

  $$x(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) + B$$

  $$\ddot{x}(t) = -A_1\omega^2 \sin(\omega t) - A_2\omega^2 \cos(\omega t)$$

  für $0 < t < \Delta t$ lösen, $\omega^2 = k/m$, $Bk = C/\Delta t$. Sei $x = 0$, $\dot{x} = 0$ für $t < 0$. Damit gilt wegen der Stetigkeit der Bewegung $x(0) = 0$, $A_2 + B = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $A_1 = 0$ somit

  $$x(t) = \frac{C}{k\Delta t}(1 - \cos(\omega t))$$

Für $t > \Delta t$ ist die Lösung

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

mit

$$C_1 = \frac{C}{k\Delta t} \sin(\omega\Delta t)$$

$$C_2 = \frac{C}{k\Delta t}(\cos(\omega\Delta t) - 1)$$

wie man leicht aus den Stetigkeitsbedingungen nachrechnet; $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ müssen bei $t = \Delta t$ stetig sein. Im Limes $\Delta t \to 0$ erhält man daraus

$$x(t) = \frac{C\omega}{k} \sin(\omega t) = \frac{C}{m\omega} \sin(\omega t)$$

für $t > 0$. Das ist also die Lösung von $m\ddot{x} + kx = C\delta(t)$. Für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$\dot{x}(t) = \frac{C}{m} \cos(\omega t)$$

Die Geschwindigkeit springt also bei $t = 0$ von 0 auf einen endlichen Wert. Das hätte man auch ausrechnen können, indem man die Bewegungsgleichung über ein kleines Intervall integriert,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt (m\ddot{x} + kx) = C$$

$$m\dot{x}(\varepsilon) - m\dot{x}(-\varepsilon) + k \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt x = C$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ verschwindet das Integral und man sieht den Sprung in der Geschwindigkeit. Betrachtet man nun eine Überlagerung vieler kleiner Stöße, also $m\ddot{x} + kx = F(t)$ mit

$$F(t) = \int dt' F(t')\delta(t - t')$$

dann kann man dieses Problem für einen Stoß $F(t')\delta(t - t')$ lösen und erhält $x(t) = F(t')\omega \sin(\omega(t - t'))\theta(t - t')/k$ und die Lösung für $F(t)$ als Überlagerung:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' F(t') \frac{\sin(\omega(t - t'))}{m\omega}$$

Dieses Beispiel ist wichtig, weil man in ganz ähnlicher Weise viele Randprobleme in der Physik lösen kann.

Literatur

Zur Fouriertransformation und zur δ-Funktion findet man reichlich Lesenswertes in den vielen Büchern mit Titeln wie etwa *Mathematik für Physiker.* Ich kann Ihnen keines dieser Bücher speziell empfehlen, da sie sehr unterschiedlich sind und mancher mit der einen, ein anderer mit der anderen Darstellung besser klar kommt. Tabellen mit Fouriertransformierten findet man in gängigen Handbüchern (ich bevorzuge das von Gradshteyn und Ryzhik: Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, San Diego ... 1992...) oder in speziellen Tabellen für Fouriertransformierte. Für ein tieferes Verständnis ist der Blick in ein Lehrbuch der Theorie der Distributionen sicher nützlich, z.B. Wolfgang Walter: Einführung in die Theorie der Distributionen, Bibliographisches Institut, Zürich 1974.