Der Cauchysche Integralsatz.
Mathematische Ergänzungen zur Physik III.

Andreas Mielke*
Institut für Theoretische Physik, Ruprecht–Karls–Universität,
Philosophenweg 19, D-69120 Heidelberg, F.R. Germany

Sommersemester 1999

Holomorphe Funktionen

Die Funktionentheorie handelt von komplexwertigen Funktionen einer (oder mehrerer) komplexer Variabler. Im folgenden werden nur Funktionen einer komplexen Variable diskutiert. Sei $f(z)$ eine solche Funktion. Eine solche Funktion ist heißt *komplex differenzierbar* bei z_0, wenn

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Im Gegensatz zu Funktionen von reellen Veränderlichen kann der Grenzwert hier auf beliebige Weise in der komplexen Ebene genommen werden. Ist $f(z)$ in einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so heißt $f(z)$ auf U *holomorph*. Ist $f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, so heißt $f(z)$ ganz.

Ableitungen

Ableitungen werden wie gewohnt gebildet und es gelten die üblichen Regeln. Im folgenden sind f und g auf U holomorph.

- $f+g$ ist holomorph und es gilt $(f+g)' = f'+g'$
- fg ist holomorph und es gilt $(fg)' = f'g+g'f$
- f/g ist holomorph, falls $g(z) \neq 0$ auf U und es gilt $(f/g)' = (f'g-g'f)/g^2$
- $f(g(z))$ ist holomorph (sofern f auf dem Wertebereich von g holomorph ist) und es gilt $\frac{df(g(z))}{dz} = g'(f(z))f'(z)$ (Kettenregel)

Beispiele

Da $f(z)=1$ und $f(z)=z$ offensichtlich ganze Funktionen sind, gilt

- Alle Polynome sind ganze Funktionen.
- Rationale Funktionen sind außer an ihren Polstellen holomorph.

Man kann außerdem zeigen, daß alle konvergenten Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ holomorph sind. Ist $f(z)$ für alle $|z| < \rho$ konvergent, so ist $f(z)$ auf $U = \{z : |z| < \rho\}$ holomorph. Konvergiert die Potenzreihe überall, so ist $f(z)$ eine ganze Funktion. $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\exp(z)$ sind also ganze Funktionen.

*E–mail: mielke@tphys.uni-heidelberg.de

Der Cauchysche Integralsatz

Der Cauchysche Integralsatz ist ein Resultat zu Kurvenintegralen von Funktionen $f(z)$ in der komplexen Ebene. Eine *Kurve* γ in der komplexen Ebene kann man zum Beispiel durch eine stetige, komplexwertige, stückweise steig differenzierbare Funktion $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ beschreiben. Damit gilt dann

$$\int_\gamma dz f(z) := \int_0^1 dt \dot{\gamma}(t) f(\gamma(t))$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist das Kurvenintegral von $f(z)$ entlang der Kurve γ, es ist durch den Ausdruck auf der rechten Seite definiert. Oft benutzt man für Kurve auch den Begriff *Weg*. Fallen die Anfangs- und Endpunkte des Wegs zusammen, dann spricht man von einem *geschlossenen Weg*. Der Cauchysche Integralsatz lautet:

> Sei γ ein geschlossener Weg in $U \subset \mathbb{C}$ und sei $f(z)$ auf U holomorph. Dann gilt
>
> $$\int_\gamma dz f(z) = 0$$

Ich skiziere den Beweis für den Fall, daß γ ein achsenparalelles Rechteck ist. Die Eckpunkte des Rechtecks seien $z_1 = \gamma(t_1 = 0) = \gamma(1)$, $z_2 = \gamma(t_2)$, $z_3 = \gamma(t_3)$, $z_4 = \gamma(t_4)$. Ich betrachte zuerst zwei triviale Spezialfälle:

1. $f(z) = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma dz f(z) &= \int_0^{t_2} dt \dot{\gamma}(t) + \int_{t_2}^{t_3} dt \dot{\gamma}(t) + \int_{t_3}^{t_4} dt \dot{\gamma}(t) + \int_{t_4}^{1} dt \dot{\gamma}(t) \\ &= z_2 - z_1 + z_3 - z_2 + z_4 - z_3 + z_1 - z_4 = 0 \end{aligned}$$

2. $f(z) = z$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma dz f(z) &= \int_0^{t_2} dt \gamma(t) \dot{\gamma}(t) + \int_{t_2}^{t_3} dt \gamma(t) \dot{\gamma}(t) + \int_{t_3}^{t_4} dt \gamma(t) \dot{\gamma}(t) + \int_{t_4}^{1} dt \gamma(t) \dot{\gamma}(t) \\ &= \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2 + z_3^2 - z_2^2 + z_4^2 - z_3^2 + z_1^2 - z_4^2) = 0 \end{aligned}$$

   In beiden Fällen kann man die Integrale als reelle Integrale schreiben.

Für den weiteren Beweis teile ich das Rechteck in vier gleiche Teile. Sei γ_1 der Rand desjenigen Teils, für den das Integral den größten Wert liefert. Dann gilt

$$\left| \int_\gamma dz f(z) \right| \le 4 \left| \int_{\gamma_1} dz f(z) \right|$$

Das Rechteck γ_1 kann nun wieder in vier gleiche Teile unterteilt werden und der Rand des Teils, für den das Integral den größten Beitrag liefert, nenne ich γ_2. Dieser Prozeß kann iteriert werden und man erhält

$$\left| \int_\gamma dz f(z) \right| \le 4^n \left| \int_{\gamma_n} dz f(z) \right|$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$ mit $|(f(z) - f(z_0))/(z - z_0) - f'(z_0)| \le \varepsilon$ für alle z mit $0 < |z - z_0| < \delta$. Also

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)| \le \varepsilon |z - z_0|$$

Da wir den Cauchyschen Integralsatz bereits für konstante und lineare Funktionen bewiesen haben, gilt

$$\int_{\gamma_n} dz f(z) = \int_{\gamma_n} dz \left[f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0) \right]$$

Sei ℓ der Umfang des ursprünglichen Rechtecks γ und d die Länge seiner Diagonalen. Dann ist $2^{-n}\ell$ der Umfang und $2^{-n}d$ die Länge der Diagonalen von γ_n. Ich wähle n so groß, daß $2^{-n}d < \delta$. Dann ist der Integrand auf der rechten Seite vom Betrag her kleiner als $2^{-n}d\varepsilon$ und damit

$$\left| \int_\gamma dz f(z) \right| \leq 4^n \left| \int_{\gamma_n} dz f(z) \right| \leq 4^n (2^{-n} d\varepsilon) 2^{-n} \ell \leq \varepsilon d\ell$$

Da wir ε beliebig klein wählen können, gilt also

$$\int_\gamma dz f(z) = 0$$

Für geschlossene Wege, die keine Rechtecke sind, kann man versuchen, den Weg durch viele Rechtecke zu approximieren. Es gibt aber etwas elegantere Verfahren. Trotzdem ist die Beweisidee für diesen einfachsten Fall auf alle allgemeineren Fälle übertragbar.

Anwendungen

Es gibt eine ganze Fülle von Anwendungen für den Cauchyschen Integralsatz. Viele wichtige Resultate der Funktionentheorie lassen sich aus diesem Satz herleiten, beispielsweise der Satz von Goursat, wonach jede holomorphe Funktion beliebig oft komplex differenzierbar ist. In der Physik benutzt man den Satz häufig, um Integrale herzuleiten. Dazu ein einfaches Beispiel: Zu berechnen ist das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2) \cos(kx)$$

Man kann zunächst den Cosinus durch eine Exponentialfunktion ersetzen

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2 + ikx)$$

Der Imaginärteil dieses Ausdrucks verschwindet, da der Imaginärteil des Integranden ungerade ist. Als nächstes kann man den Exponenten umschreiben

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-a \left(x - \frac{ik}{2a} \right)^2 - \frac{k^2}{4a} \right)$$

Statt von $-\infty$ bis ∞ integrieren wir von x_1 bis x_2. Statt des Integrals entlang der reellen Achse betrachten wir das Integral der Funktion $f(z) = \exp(-az^2)$ entlang des Rechtecks mit den Eckpunkten x_1, x_2, $x_2 + ik/2a$, $x_1 + ik/2a$. Wegen des Cauchyschen Integralsatzes verschwindet dieses Integral. Bildet man $x_2 \to \infty$ so verschwindet der Integrand und damit das Integral auf dem Stück von x_2 nach $x_2 + ik/2a$. Analog schickt man $x_1 \to -\infty$. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-az^2) + \int_{\infty + ik/2a}^{-\infty + ik/2a} dz \exp(-az^2) = 0$$

Daraus folgt sofort

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-a(x - ik/2a)^2)$$

Man darf also den Integrationsweg in die komplexe Ebene verschieben, ohne daß sich der Wert des Integrals ändert. Damit erhält man schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2) \cos(kx) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(-k^2/4a)$$

Literatur

Die oben angegebene Beweisskize entstammt dem Buch
Klaus Jänich: Einführung in die Funktionentheorie, Springer Hochschultext, Berlin, Heidelberg 1980.
Ein Klassiker in diesem Bereich ist
Leonhard Euler: Zur Theorie komplexer Funktionen, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1983.
Dieses Buch ist für historisch interessierte sehr schön zu lesen, als Lehrbuch heute aber nicht geeignet.