

Vielteilchentheorie, Nichtrelativistische QFT

Literatur: z.B. Brawst, Baym

1) Identische Teilchen

a) Pauli-Prinzip

Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen:

$$\text{Hilbertraum } \mathcal{H}_{1/2} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}_0$$

ohne Spin

Wellenfunktion für 2 Teilchen:

$$\Psi(\vec{x}_1, r_1; \vec{x}_2, r_2)$$

Spin

Definiere π_s, π_σ :

$$\pi_s \Psi(\vec{x}_1, r_1; \vec{x}_2, r_2) = \Psi(\vec{x}_1, r_2; \vec{x}_2, r_1)$$

$$\pi_\sigma \Psi(\vec{x}_1, r_1; \vec{x}_2, r_2) = \Psi(\vec{x}_2, r_1; \vec{x}_1, r_2)$$

Offenbar $\pi_s^2 = \mathbb{1}, \pi_\sigma^2 = \mathbb{1}$

→ Eigenwerte $\epsilon_s = \pm 1, \epsilon_\sigma = \pm 1$

Definiere $\pi_{ges} = \pi_s \otimes \pi_\sigma$

$$\rightarrow \pi_{ges}(u \phi) = (\pi_s u)(\pi_\sigma \phi) = \epsilon_s u \epsilon_\sigma \phi$$

Spin Ort

$$= \underbrace{\epsilon_s \epsilon_\sigma}_{= \epsilon_{ges}} u \phi$$

für Eigenfunktionen u, ϕ von π_s, π_σ

Pauli-Prinzip: $\epsilon_{ges} = -1$ für Fermionen

Hilbertraum für System aus 2 Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen:

naiv: $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(1) \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(2) \cong \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^2$

mit Pauli-Prinzip:

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} = \{ \psi \in \mathcal{H}^2 \mid \Pi_{\text{ges}} \psi = -\psi \}$$

Konsistenz erfordert, daß alle physikalisch relevanten Operatoren mit Π_{ges} kommutieren.

↔ "Teilchen ununterscheidbar"

Ist man einmal im Unterraum aus Eigenfunktionen von Π_{ges} (beim Urknall), so bleibt man also immer in diesem Unterraum.

Pauli-Prinzip gilt für Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ (Fermionen)

Bei Bosonen (Spin $0, 1, 2, \dots$) gilt

$$\Pi_{\text{ges}} \psi = +\psi$$

Für mehr Teilchen: wellgenauere Austausch (Π_{ges}) → Permutationen

b) Permutationsgruppe

Sei S_n die Permutationsgruppe für n Objekte (Teilchen)

$$\pi \in S_n \rightarrow \pi(1, \dots, n) = (\pi(1), \dots, \pi(n))$$

S_n ist endliche Gruppe mit $n!$ Elementen.

Der Austausch von zwei Objekten (aus n) heißt Transposition.

Def. $T \in S_n$ heißt Transposition \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \exists_{i,j, 1 \leq i < j \leq n} T(1, \dots, i, \dots, j, \dots, i, \dots, j, \dots, n) = (1, \dots, j, \dots, i, \dots, i, \dots, j, \dots, n)$$

Jede Permutation kann durch Transpositionen erzeugt werden. Dies jedoch nicht eindeutig.

Aber Parität der Zahl der Transpositionen (gerade / ungerade) ist eindeutig.

\rightarrow def. Signum der Permutation $\text{sign } \pi = \pm 1$

Für zwei Permutationen π_1, π_2 :

$$\text{sign}(\pi_1 \pi_2) = \text{sign } \pi_1 \cdot \text{sign } \pi_2$$

Permutationsgruppe S_n hat Darstellung
auf n -Teilchen Hilbertraum; $\mathcal{H}^n = \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{H}_{1/2}$

$\pi \in S_n$: $\pi \rightarrow \hat{\pi}, \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^n$ mit

$$(\hat{\pi}\psi)(\xi_1, \dots, \xi_n) = \psi(\xi_{\pi^{-1}(1)}, \xi_{\pi^{-1}(2)}, \dots, \xi_{\pi^{-1}(n)})$$

$\xi = (\vec{x}, \sigma)$
Ort & Spin

Damit ist $\hat{\pi}_1 \hat{\pi}_2 = \widehat{\pi_1 \pi_2}$

und für $\pi = \mathbb{1} \rightarrow \hat{\pi} = \mathbb{1}$

Aud es wird

$$\psi_1(\xi_1) \dots \psi_n(\xi_n) \xrightarrow{\hat{\pi}} \psi_{\pi(1)}(\xi_1) \dots \psi_{\pi(n)}(\xi_n)$$

Für identische Teilchen \rightarrow Symmetrie:

$$\forall \pi \in S_n \quad [H, \hat{\pi}] = 0$$

d.h. die Dynamik (der Hamiltonoperator)
ist symmetrisch (= invariant) unter

Permutationen der Teilchen.

\rightarrow Wellenfunktionen können nach den
Eigenschaften bzgl. $\hat{\pi}$ klassifiziert
werden:

Eigenräume fester Energie $V_E = \{\psi \in \mathcal{H}^n \mid H\psi = E\psi\}$
sind invariant unter $\hat{\pi}$ und
tragen (o.B.d.A. irreduzible) Darstellung
von S_n .

c) Pauli-Prinzip, Slater-Determinante

Gruppentheorie \Rightarrow Es gibt genau zwei eindimensionale Darstellungen von S_n :

- (i) $\hat{\pi} f = f$ triviale Darstellung
- (ii) $\hat{\pi} f = (\text{sign } \pi) f$ fast-triviale Darst. f total antisymmetrisch

Diese entsprechen (i) Bosonen bzw. (ii) Fermionen.

Pauli-Prinzip für n Elektronen (Fermionen)

$$\mathcal{H}_{\text{phys}}^n = \{ \psi \in \mathcal{H}^n \mid \forall_{\pi \in S_n} \hat{\pi} \psi = (\text{sign } \pi) \psi \}$$

$[H, \hat{\pi}] = 0 \iff$ "Elektronen ununterscheidbar"

$$\rightarrow \psi \in \mathcal{H}_{\text{phys}}^n \rightarrow e^{-iHt/\hbar} \psi \in \mathcal{H}_{\text{phys}}^n$$

Bosonen

$$\mathcal{H}_{\text{phys}}^n = \{ \psi \in \mathcal{H}^n \mid \forall_{\pi \in S_n} \hat{\pi} \psi = \psi \}$$

Wir schreiben auch

$$\mathcal{H}_n^F = \mathcal{H}_{\text{phys}}^n \text{ f. Fermionen}$$

$$\mathcal{H}_n^B = \mathcal{H}_{\text{phys}}^n \text{ f. Bosonen}$$

Konstruktion von physikalischen Zuständen für Fermionen:

a) 2 Fermionen: Sei $\tilde{A} = 1 - \hat{\pi}_2$

Dann ist \tilde{A} ein Projektor auf die physikalischen Zustände, d.h.

$\tilde{A}: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}_{phys}^2$ Projektor

Bew: $f \in \mathcal{H}^2$ ($\hat{\pi}_2^2 = 1$)

$\hat{\pi}_2 \tilde{A} f = \hat{\pi}_2 (1 - \hat{\pi}_2) f = (\hat{\pi}_2 - 1) f = - (1 - \hat{\pi}_2) f = - \tilde{A} f$

$\rightarrow \tilde{A} f \in \mathcal{H}_{phys}^2$ \square

Außerdem $\tilde{A}^2 = 2\tilde{A}$, \rightarrow norm. Projektor ist $A = \frac{1}{2}\tilde{A}$.

b) n Fermionen

Antisymmetrischer Projektor:

$\tilde{A} = \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) \hat{\pi}$

\tilde{A} ist Projektor $\tilde{A}: \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}_{phys}^n$

Bew: für $\gamma \in S_n$:

$\hat{\gamma} \tilde{A} f = \hat{\gamma} \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) \hat{\pi} f$
 $= \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \gamma) (\text{sign } \gamma \pi) \hat{\gamma} \hat{\pi} f$
 $= (\text{sign } \gamma) \tilde{A} f$

$(\text{sign } \gamma)^2 = 1$ \rightarrow

\square

Außerdem gilt $\tilde{A}^2 = n! \tilde{A}$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } \tilde{A} \tilde{A} \psi &= \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) \hat{\pi} \underbrace{A \psi}_{\in \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}}} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) (\text{sign } \pi) A \psi \\ &= \sum_{\pi \in S_n} A \psi = n! A \psi \quad \square \end{aligned}$$

Damit normierter Antisymmetrisierungsoop.

$$A = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) \hat{\pi}$$

Es gilt $A^+ = A$. (Invarianz unter Umbenennung d. Variablen)

einfachste Zustände in \mathcal{H}^n : Produkte
 ————— " ————— in $\mathcal{H}_n^{\mathbb{F}}$: A-Produkte

Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ n Einzelchenzustände $\varphi_\mu(\xi)$

$$\rightarrow \varphi_1(\xi_1) \cdots \varphi_n(\xi_n) = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{H}^n$$

Damit $\tilde{A} \varphi \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}}$, mit Normierung auf $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ (nicht n)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n!}} (\tilde{A} \varphi)(\xi_1, \dots, \xi_n) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) (\hat{\pi} \varphi)(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) \varphi_{\pi(1)}(\xi_1) \cdots \varphi_{\pi(n)}(\xi_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi_1) & \cdots & \varphi_n(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(\xi_n) & \cdots & \varphi_n(\xi_n) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \det(\varphi_\mu(\xi_\nu)) \end{aligned}$$

Diese (normierten) Slater-Determinanten

$$Sl(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \det(\varphi_j(\xi_k))$$

bilden eine Basis von $\mathcal{H}_n^{\mathbb{F}}$

Es gilt

$$* \varphi_1, \dots, \varphi_n \text{ linear abhängig} \Rightarrow Sl(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0$$

* Schmidt-Orthogonalisierung ändert Wert der Determinante nicht.

$$* Sl(\varphi_{\pi(1)}, \dots, \varphi_{\pi(n)}) = (\text{sign } \pi) Sl(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

Konstruktion von physikalischen Zuständen

für Bosonen

Für Bosonen

$$\mathcal{H}_n^{\mathbb{B}} = \{ \psi \in \mathcal{H}^n \mid \forall \pi \in S_n \hat{\pi} \psi = \psi \} = \mathcal{H}_n^{\text{phys}}$$

Beweite Symmetrisierungsoperator

$$S = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \hat{\pi}$$

S ist ein Projektionsoperator

$$S: \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}_n^{\mathbb{B}}$$

Es gilt $S^+ = S$. (wg. Invarianz eines n-dim. Integrals unter Umbenennung d. Variablen)

2) Fock-Räume, Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Wir haben n -Teilchen-Hilberträume \mathcal{H}^n_{phys} für $n = 0, 1, 2, \dots$ ($n=0$ wichtig, s.u.)

Idee: Fasse alle diese Räume zu einem Raum zusammen: Fock-Raum

Hintergrund: in nicht-rel. QM Teilchenzahl erhalten, aber bei hohen Energien Teilchenzeugung und -vernichtung möglich

→ Teilchenzahl unklar

→ wichtiges Hilfsmittel: Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Fock-Raum.

Fock-Räume

Def. zunächst „Null-Teilchen-Raum“ \mathcal{H}^0 :

$\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}$, d.h. 1-dim Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$f_0 \in \mathcal{H}^0 \rightarrow \langle f_0 | f_0 \rangle = f_0^* f_0$$

(hier keine Integration)

Definiere dann:

Fockraum \mathcal{H}^F der Fermionen

$$\mathcal{H}^F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^F = \mathcal{H}_0^F \oplus \mathcal{H}_1^F \oplus \mathcal{H}_2^F \oplus \dots$$

Fockraum \mathcal{H}^B der Bosonen

$$\mathcal{H}^B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^B$$

Also: $f \in \mathcal{H}^{F,B} \Leftrightarrow f$ ist ∞ -Tupel von n -Teldenfunktionen:

d.h. $f = (f_0, f_1(\xi_1), f_2(\xi_1, \xi_2), \dots)$

Man bezeichnet

$$|0\rangle = (1, 0, 0, \dots)$$

als (normiertes) Vakuum.

Dieses Vakuum in nicht-rel. Theorie nur ein mathematischer Trick für Konsistenz der Notation / Fockraumbeschreibung, ohne phys. Konsequenz. In QFT hat Vakuum aber komplizierte Struktur.

Skalarprodukt im Fockraum (für \mathcal{H}^F und \mathcal{H}^B):

$$\langle f^{(1)}, f^{(2)} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n^{(1)}, f_n^{(2)} \rangle$$

wobei $f^{(i)} = (f_0^{(i)}, f_1^{(i)}, \dots)$

Wir haben weiter Projektoren

$$P_n : \mathcal{H}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}} \rightarrow \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$$

$$f \mapsto f_n$$

und wir können die natürliche Einbettung

$$\mathcal{H}_n^{\mathbb{F}} \subset \mathcal{H}^{\mathbb{F}} \quad \text{mit} \quad f_n \mapsto (0, \dots, 0, f_n, 0, \dots)$$

↑
n-te Stelle

verwenden.

Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \mathbb{1}$

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Wichtigste Operatoren im Fockraum:

Erzeuger (a^+) und Vernichter (a)

$$a^+, a : \mathcal{H}_1 \rightarrow \text{End } \mathcal{H}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$$

d.h. für $\varphi \in \mathcal{H}_1$: $a(\varphi) : \mathcal{H}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$

mit der Eigenschaft

$$a(\varphi) : \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}, \mathbb{B}} \rightarrow \mathcal{H}_{n-1}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$$

$$a^+(\varphi) : \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}, \mathbb{B}} \rightarrow \mathcal{H}_{n+1}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$$

im Sinne obiger Einbettung.

Definition der Erzeuger a^+ und Vernichter a :

Sei $\varphi \in \mathcal{H}_1$.

Für $f \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}}$ definiere

$$a^+(\varphi) f := \sqrt{n+1} A \varphi \otimes f,$$

d.h.

$$(a^+(\varphi) f)(\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) = \sqrt{n+1} A \varphi(\xi_1) f(\xi_2, \dots, \xi_{n+1})$$

Für $f \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{B}}$ definiere

$$a^+(\varphi) f := \sqrt{n+1} S \varphi \otimes f$$

Für $f \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$ definiere

$$(a(\varphi) f)(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) := \sqrt{n} \int \varphi^*(\xi) f(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$

Integration, um
eine Variable
loszuwerden.

Integral über kont. Variable,
Summe über diskrete (Spin)

In dieser Def. ist erste Stelle von f bei
Integration ausgezeichnet, aber wegen
(Anti-)Symmetrie nicht schädlich.

Also gilt

$$f_0 \in \mathcal{H}_0 \rightarrow a(\varphi) f_0 = 0$$

und für $f = (f_0, f_1, f_2, \dots) \in \mathcal{H}^{\mathbb{F}, \mathbb{B}}$

$$a^+(\varphi) f = (0, \varphi f_0, \sqrt{2} \underset{(S)}{A} \varphi \otimes f_1, \dots)$$

$$a(\varphi) f = (\langle \varphi, f_1 \rangle, \sqrt{2} \int \varphi^* f_2, \dots)$$

Wichtige Eigenschaften der Operatoren a, a^+

a) $a^+(\varphi)$ ist hermitisch adjungiert zu $a(\varphi)$, d.h.

$$(a(\varphi))^+ = a^+(\varphi),$$

also

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}^{\text{F.B.}} \quad \langle \varphi_1, a^+(\varphi) \varphi_2 \rangle = \langle a(\varphi) \varphi_1, \varphi_2 \rangle$$

Beweis: als Übung

b) a^+ ist linear auf \mathcal{H}_1 , d.h.:

$$a^+(\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2) = \lambda a^+(\varphi_1) + \mu a^+(\varphi_2)$$

a ist antilinear auf \mathcal{H}_1 , d.h.

$$a(\lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2) = \lambda^* a(\varphi_1) + \mu^* a(\varphi_2)$$

c) Vertauschungs- bzw. Antivertauschungsrelationen

Definieren Kommutator bzw. Antikommutator

$$[A, B]_- = [A, B] = AB - BA$$

$$[A, B]_+ = \{A, B\} = AB + BA$$

Für Fermionen und Bosonen gelten unterschiedliche Vertauschungsrelationen!

Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_1$.

Dann gilt für Fermionen

$$\{a(\varphi_1), a^+(\varphi_2)\} = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \cdot Id$$

$$\{a(\varphi_1), a(\varphi_2)\} = 0$$

$$\{a^+(\varphi_1), a^+(\varphi_2)\} = 0$$

und für Bosonen

$$[a(\varphi_1), a^+(\varphi_2)] = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \cdot Id$$

$$[a(\varphi_1), a(\varphi_2)] = 0$$

$$[a^+(\varphi_1), a^+(\varphi_2)] = 0$$

Beweis: als Übung, benutze Def. der Operatoren
(\rightarrow Operatoren A und S)

d) Zusammenhang mit Basissystemen

Für Fermionen sind ausgezeichnete Basissysteme die Slater-Determinanten.

Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1,2,\dots}$ O.N.-Basis von \mathcal{H}_1 .

Dann erhält man O.N.-Basis von \mathcal{H}_n^F aus

$$| \ell(\varphi_{\alpha_1}, \dots, \varphi_{\alpha_n})(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(\xi_1) & \dots & \varphi_{\alpha_n}(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{\alpha_1}(\xi_n) & \dots & \varphi_{\alpha_n}(\xi_n) \end{vmatrix} |$$

In einem solchen Zustand bezeichnet man die 1-Teilchenzustände $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ als "besetzt", die anderen als "leer" oder "unbesetzt". Die Bedingung $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ bedeutet gerade, daß jeder Zustand höchstens einmal besetzt werden kann.

Die Operatoren $a(\varphi_\alpha)$ und $a^+(\varphi_\alpha)$ bilden normierte Slater-Determinanten auf normierte Slater-Determinanten ab!

Schreibe $a_\alpha := a(\varphi_\alpha)$, $a_\alpha^+ := a^+(\varphi_\alpha)$.

Dann ist

$$a_\alpha^+ \text{Sl}(\varphi_{\alpha_1} \dots \varphi_{\alpha_n}) = \text{Sl}(\varphi_\alpha \varphi_{\alpha_1} \dots \varphi_{\alpha_n})$$

$$a_\alpha \text{Sl}(\varphi_\alpha \varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_n}) = \text{Sl}(\varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_n})$$

a_α vernichtet Besetzung von φ_α , d.h.

$$a_\alpha \text{Sl}(\dots) = 0 \quad \text{falls } \alpha \text{ nicht besetzt war}$$

a_α^+ erzeugt Besetzung von φ_α . Daher

$$a_\alpha^+ \text{Sl}(\dots) = 0 \quad \text{falls } \alpha \text{ schon besetzt war}$$

Durch iteriertes Anwenden von a_α^+ auf das normierte Vakuum kann man alle Slater-Determinanten erzeugen,

$$a^+(\varphi) |0\rangle = \varphi$$

$$a^+(\varphi_1) \varphi = a^+(\varphi_1) a^+(\varphi) |0\rangle$$

$$= \varphi(\varphi_1, \varphi)$$

$$\varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = a_{\alpha_1}^+ \dots a_{\alpha_n}^+ |0\rangle$$

Für eine gegebene Basis sind die Antivertauschungsrelationen

$$\{a_\alpha, a_\beta^+\} = \delta_{\alpha\beta} \cdot 1$$

$$\{a_\alpha, a_\beta\} = 0$$

$$\{a_\alpha^+, a_\beta^+\} = 0$$

Für Bosonen sind beliebige Besetzungen möglich. Sei wieder $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1, \dots}$ eine O.N.-Basis von \mathcal{H}_1 . Dann lassen sich Zustände in \mathcal{H}_n^B schreiben als

$$\phi = S \varphi_1 \dots \varphi_n$$

Sei dann $\varphi \in \mathcal{F}_1$ mit $\varphi \neq \varphi_1, \dots, \varphi_n$

Im $(n+k)$ -Teilchenzustand

$$f = S \varphi^k \otimes \phi$$

ist also φ k -mal besetzt. ($\varphi^k(\xi_1, \dots, \xi_k) = \varphi(\xi_1) \dots \varphi(\xi_k)$)

Die Wirkung von $a(\varphi)$ auf Bosonenzustände ist festgelegt durch seine Wirkung auf ϕ und f .

Es ist

$$a(\varphi) \phi = 0$$

und

$$a^+(\varphi) f = \sqrt{n+k+1} S \varphi^{k+1} \otimes \phi$$

$$a(\varphi) f = \frac{k}{\sqrt{k+1}} S \varphi^{k-1} \otimes \phi$$

Bemerkung: Definition von Zwei-Teilchen-Vermittlungs- / Erzeugungsoperatoren ist nicht nötig, da diese durch a und a^+ generiert werden.

e) Operatorbasis in $\mathcal{H}^{F(B)}$

Jede Funktion in $\mathcal{H}_n^{F(B)}$ ist darstellbar als Linearkombination von Funktionen

$$f_1 = a_{\alpha_1}^+ \dots a_{\alpha_n}^+ |0\rangle$$

mit $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ f. Fermionen

$\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$ f. Bosonen.

Also

$$a_{\alpha_n} \dots a_{\alpha_1} f_1 = |0\rangle$$

Wenn $f_2 = a_{\beta_1}^+ \dots a_{\beta_n}^+ |0\rangle$,

so $f_2 = a_{\beta_1}^+ \dots a_{\beta_n}^+ a_{\alpha_n} \dots a_{\alpha_1} f_1$
 $= |f_2\rangle \langle f_1 | f_1\rangle$

Jeder Operator in $\mathcal{H}_n^{F,B}$ (in diesem Beispiel also die Abbildung $f_1 \mapsto f_2$) ist entwickelbar in Normalprodukte

der Form

$$a_{\beta_1}^+ \dots a_{\beta_n}^+ a_{\alpha_n} \dots a_{\alpha_1}$$

in denen die Erzeuger links und die Vernichter rechts stehen.

3) Liften von Operatoren, Teilchenfalloperator

19

Liften von Operatoren hier für 1- und 2-Teilchenoperatoren, geht auch allgemein.

Ein-Teilchenoperatoren

Sei Operator $B_1: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ gegeben,

z.B. kin. Energie $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$

Impuls $\vec{p} = -i\hbar \nabla$

Drehimpuls $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$

WW mit em. Feld

$$-\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}) \right)^2 \quad \text{ohne Spin}$$
$$+ g \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad \text{mit Spin}$$

Definiere dann den zu B_1 gehörenden gelifteten Operator $B_n: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$ durch

$$B_n := \sum_{\mu=1}^n B_1(\xi_{\mu}),$$

genauer:

$$B_n := B_1 \otimes \text{Id}^{n-1} + \text{Id} \otimes B_1 \otimes \text{Id}^{n-2} + \dots$$
$$+ \text{Id}^{n-2} \otimes B_1 \otimes \text{Id} + \text{Id}^{n-1} \otimes B_1$$

wobei $\text{Id}^n = \mathbb{1}^n = \underbrace{\text{Id}_{\mathcal{H}_1} \otimes \dots \otimes \text{Id}_{\mathcal{H}_1}}_{n \text{ mal}}$

Beispiele: kin. Energie $B_n = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\mu=1}^n \Delta_{\mu}$

Impuls $B_n = \sum_{\mu=1}^n \vec{p}_{\mu}$

Um aus B_n Fockraum-Operator zu konstruieren, verlangt

$$\forall \pi \in S_n \quad [B_n, \hat{\pi}] = 0,$$

also $B_n \mathcal{H}_n^{F(\pi)} \rightarrow \mathcal{H}_n^{F(\beta)}$

Sei $f = (f_0, f_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{H}^{F(\pi)}$

Definiere den gelifteten Fockraumoperator

$$B : \mathcal{H}^{F(\beta)} \rightarrow \mathcal{H}^{F(\beta)}$$

durch

$$Bf = \sum_{n=0}^{\infty} B_n f_n = (B_0 f_0, B_1 f_1, \dots, B_n f_n, \dots)$$

mit

$B_0 f_0 := 0 \leftarrow$ Vakuum soll keinen Impuls, kin. Energie etc. haben.

Also $B = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n$.

Beachte: alle wichtigen Informationen sind schon in B_1 enthalten.

Sei nun $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1, \dots}$ eine O.N.-Basis von \mathcal{H}_1

Dann gilt

$$B = \sum_{\alpha, \beta} \langle \varphi_\alpha | B_1 | \varphi_\beta \rangle a^\dagger(\varphi_\alpha) a(\varphi_\beta)$$

und dies ist unabhängig von der Wahl der Basis!

Bew: als Übung.

Zweitteilchenoperatoren

Sei $V_2: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ Zweitteilchenoperator

(z.B. $\sum_{\mu < \nu} V(x_\mu, x_\nu)$). Dann sei $V_n: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$

der geliftete n -Teilchenoperator

$$V_n = \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu < \nu}}^n V(x_\mu, x_\nu)$$

Respektiert V_n die (Anti-) Symmetrie, d.h.

gilt wieder $\forall \pi \in S_n [V_n, \hat{\pi}] = 0$, so ist

der geliftete Fockraumoperator

$$V: \mathcal{H}^{\mp(\mathbb{R})} \rightarrow \mathcal{H}^{\mp(\mathbb{R})}$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n P_n \quad \text{mit } V_0 = V_1 = 0$$

Hauptsatz: Es gilt

$$V = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\delta a_\gamma$$

beachte Reihenfolge!

wobei

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle \alpha\beta | V_2 | \gamma\delta \rangle$$

mit

$$|\alpha\beta\rangle = a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_\alpha \otimes \varphi_\beta \overset{(+)}{\pm} \varphi_\beta \otimes \varphi_\alpha) \in \mathcal{H}_2^{\mp(0)}$$

↑
- für Fermionen
+ für Bosonen

Bew.: als Übung.

Hier war $V_{\alpha\beta\gamma\delta}$ für (anti-)symmetrische Zustände berechnet. Allgemein kann man folgern:

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} = \underbrace{\overline{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}}_{\text{Direktor}} (+) \underbrace{\overline{V}_{\alpha\beta\delta\gamma}}_{\text{Austauschtor}}$$

Mit

$$\begin{aligned} \overline{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \langle \varphi_\alpha \otimes \varphi_\beta | V_2 | \varphi_\gamma \otimes \varphi_\delta \rangle \\ &= \sum_{r,r'} \int d^3x d^3x' \varphi_\alpha^*(\vec{x}, r) \varphi_\beta^*(\vec{x}', r') V(\vec{x}, \vec{x}') * \\ &\quad * \varphi_\gamma(\vec{x}, r) \varphi_\delta(\vec{x}', r') \end{aligned}$$

für lokales Potential

Man kann auch Operatoren für 3-Teilchen (oder mehr) - Wechselwirkung konstruieren, die aber in praktischen Anwendungen fast nie benötigt werden.

$$\left(\rightarrow \sum_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} V_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\gamma^\dagger a_\delta a_\epsilon a_\zeta \right)$$

Typischer Fall ist z.B. ein Hamiltonoperator mit 2-Teilchen - Wechselwirkung,

$$H: \mathcal{H}^{\mp(2)} \rightarrow \mathcal{H}^{\mp(2)}$$

$$H = \sum T_{\alpha\beta} a_\alpha^\dagger a_\beta + \frac{1}{4} \sum V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\delta a_\gamma$$

$$\text{mit } T_{\alpha\beta} = \langle \varphi_\alpha | -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta | \varphi_\beta \rangle$$

Teilchenzahl - Operator

Sei \hat{N} die geladene Identität.

Es ist also $B_1 = \text{Id}$

$$\rightarrow \langle \alpha | B_1 | \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

Also

$$\hat{N} = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}$$

Dann

$$B_n = B_1 \otimes \text{Id}^{n-1} + \dots + \text{Id}^{n-1} \otimes B_1 = n \cdot \text{Id}_{\mathcal{H}_n}$$

Also für $f_n \in \mathcal{H}_n^{F(B)}$

$$\hat{N} f_n = n f_n$$

Gleichzeitig $H f_n = H_n f_n$

\rightarrow es gilt Symmetrie $[H_n, \hat{N}] = 0$

Eigenwerte von \hat{N} sind gerade die Teilchenzahlen.

4) Feldoperatoren

Definiere folgende Feldoperatoren

$$F(\xi) := \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(\xi) a_{\alpha}$$

$$F^{\dagger}(\xi) := \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}^{\dagger}(\xi) a_{\alpha}^{\dagger}$$

Diese Definitionen ist unabhängig von Wahl der Basis $\{\varphi_{\alpha}\}_{\alpha}$

Eigenschaften der Feldoperatoren

a) $F(\xi) : \mathcal{H}^{F(\mathcal{B})} \rightarrow \mathcal{H}^{F(\mathcal{B})}$ ist für festes ξ eine operatorwertige Distribution.

Es gilt

$$a_\alpha(\varphi) = \int_{\mathcal{B}} F(\xi) \varphi_\alpha(\xi)$$

$$a_\alpha^\dagger(\varphi) = \int_{\mathcal{B}} F^\dagger(\xi) \varphi_\alpha^*(\xi)$$

d.h. "verschmiert" (gewichtet) mit Gewichtsfunktion φ_α erhält man gerade a_α zurück.

b) (Anti-) Vertauschungsrelationen

$$[F(\xi), F(\xi')]_{\pm} = \delta(\xi - \xi') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta_{rr'}$$

↖ für Fermionen +
Bosonen -

(Beweis mittels Vollständigkeitsrelation)

Die (Anti-) Vertauschungsrelationen legen die Feldoperatoren fest, wenn der Vakuumzustand festgelegt ist.

c) Sei $\varphi_\xi := F^+(\xi) |0\rangle$ sei

„formaler“ Einzelteilchenzustand (genauer:
dies ist eine Distribution)

Dann ist

$$\varphi_\xi(\xi') = \delta(\xi - \xi'),$$

d.h. $F^+(\xi)$ erzeugt ein im Punkt ξ
„lokalisiertes“ Teilchen.

d) Struktur der 1-Teilchen-Operatoren

Betrachte den 1-Teilchen-Operator

$$\begin{aligned} B &= \sum_{\alpha, \beta} B_{\alpha\beta} a_\alpha^+ a_\beta \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \int_{\xi} \varphi_\alpha^*(\xi) \underbrace{B_1(\xi)} \varphi_\beta(\xi) a_\alpha^+ a_\beta \\ &= \int_{\xi} F^+(\xi) B_1(\xi) F(\xi) \end{aligned}$$

Dies ist unabhängig von der Basis $\{a_\alpha\}$,
weil die Feldoperatoren es sind.

$$B = \int_{\xi} F^+(\xi) B_1(\xi) F(\xi)$$

ist die Quantisierung des Funktionals

$$\tilde{B} : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\tilde{B}(\varphi, \varphi^*) := \int_{\xi} \varphi^*(\xi) B_1(\xi) \varphi(\xi)$$

mit Hilfe der Quantisierungsregel

$$\varphi \rightarrow F, \quad \varphi^* \rightarrow F^+ \quad \text{und Normalordnung} \\ \text{(d.h. } F^+ \text{ links, } F \text{ rechts).}$$

Daher heißt diese Vorschrift "2. Quantisierung"
(Der Erwartungswert wird quantisiert.)

e) Struktur der 2-Teilchen-Operatoren

$$V = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ a_{\delta} a_{\gamma}$$

↑ (anti-)symmetrisierte Matrixelemente

Direkt- und Austauschoren geben wegen der (Anti-) Vertauschungsrelationen den gleichen Beitrag:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int_{\xi_1, \xi_2} \varphi_{\alpha}^*(\xi_1) \varphi_{\beta}^*(\xi_2) V(\xi_1, \xi_2) \varphi_{\alpha}(\xi_1) \varphi_{\beta}(\xi_2) a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\alpha} a_{\beta}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\xi_1, \xi_2} F^{\dagger}(\xi_1) F^{\dagger}(\xi_2) V(\xi_1, \xi_2) F(\xi_2) F(\xi_1)$$

Dies ist gerade die 2. Quantisierung von

$$\frac{1}{2} \int_{\xi_1, \xi_2} \varphi^*(\xi_1) \varphi^*(\xi_2) V(\xi_1, \xi_2) \varphi(\xi_2) \varphi(\xi_1)$$

Beachte Analogie zur Elektrodynamik:

Selbstenergie $\rho(\xi_1) V(\xi_1, \xi_2) \rho(\xi_2)$ mit $\rho = \varphi^* \varphi$

Beachte: Bei der Vorschrift der 2. Quantisierung ist Vorzeichen nicht festgelegt: die Funktionen φ sind vertauschbar, beim Vertauschen der Feldoperatoren treten aber für Fermionen zusätzliche Vorzeichen auf.

Bemerkung: In der Feldtheorie treten

häufig hermitesche Operatoren vom Typ

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (F + F^{\dagger})$$

$$\pi = -i \frac{1}{\sqrt{2}} (F - F^{\dagger})$$

auf.

5) Vakua

* Es existiert ein eindeutiger Zustand $\phi \in \mathcal{H}^{F(B)}$ mit

$$\forall_\alpha a_\alpha \phi = 0.$$

Es gilt

$$\forall_\alpha a_\alpha \phi = 0 \iff \phi = \lambda |0\rangle,$$

d.h. die Bedingung $\forall_\alpha a_\alpha \phi = 0$ definiert das Vakuum $|0\rangle$.

Zum Beweis beachte, daß $a(\varphi)\phi = 0$ bedeutet, daß φ in Produktentwicklung von ϕ nicht vorkommt. Dies gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}_1^{F(B)}$, also kommt kein φ in Produktentwicklung vor.

* Betrachte nun Formionen. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_1 a_2^+ a_3 a_4^+ | 0 \rangle &= \langle 0 | a_1 a_2^+ \underbrace{(a_3 a_4^+ + a_4^+ a_3)}_{= \delta_{34}} | 0 \rangle \\ &\stackrel{a_3 | 0 \rangle = 0}{=} \langle 0 | a_1 a_2^+ | 0 \rangle \delta_{34} \\ &= \delta_{12} \delta_{34} \end{aligned}$$

Frage: Ist diese Rechnung aufgrund der algebraischen Relationen auch allgemeiner möglich - nicht nur bzgl. Vakuum $|0\rangle$?

Betrachte dazu die N -Teilchen determinante

$$\begin{aligned}\phi &:= \det \varphi_1 \dots \varphi_N \\ &= a_1^+ \dots a_N^+ |0\rangle\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}a_\alpha^+ \phi &= 0 && \text{für } \alpha = 1, \dots, N \\ a_\alpha \phi &= 0 && \text{für } \alpha > N\end{aligned}$$

Dies entspricht der Vakuum-eigenschaft mit folgender Redefinition der Operatoren (Bogoljubov-Transformation)

$$b_\alpha := \begin{cases} a_\alpha^+ & \text{für } \alpha = 1, \dots, N \\ a_\alpha & \text{für } \alpha > N \end{cases}$$

Dabei nennt man ϕ das Quasiteilchen-Vakuum, die b_α Quasiteilchenoperatoren.

N heißt dann Fermikante.

Beachte: Für Definition dieser Operatoren muß das neue Vakuum festgelegt sein!

Es gilt dann

$$\forall_{\alpha} b_{\alpha} \phi = 0$$

und

$$\{b_{\alpha}^{\dagger}, b_{\alpha'}\} = \delta_{\alpha\alpha'}$$

Man bezeichnet dann oft

$\alpha \leq N$ mit kleinen Buchstaben

$$\alpha = a, b, \dots$$

$\alpha > N$ mit großen Buchstaben

$$\alpha = A, B, \dots$$

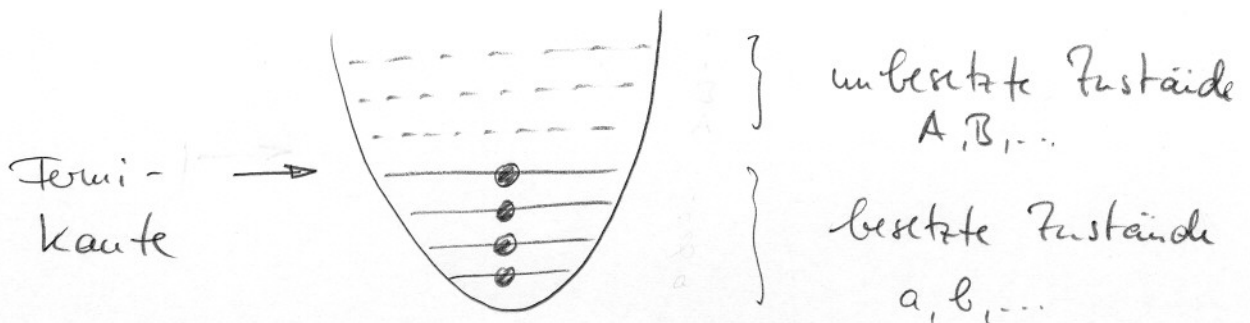
Also

$$b_A = a_A$$

$$b_a = a_a^{\dagger}$$

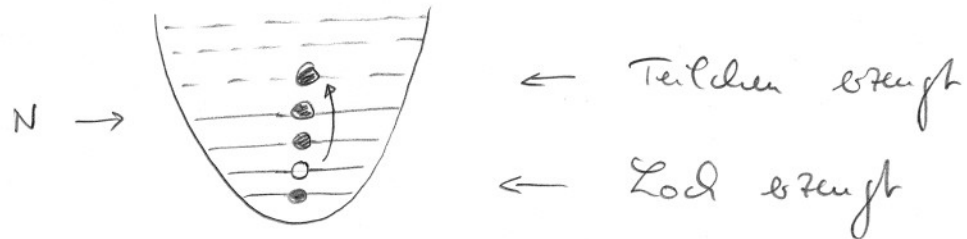
* Zur Interpretation dieser Bogolyubov-Transformation:

Das Quasiteilchenvakuum ϕ aus dem linken wir als



Der Operator $b_A^+ b_a^+$ erzeugt zwei Quasiteilchenanregungen, nämlich

$$b_A^+ b_a^+ |\phi\rangle = a_A^+ a_a^+ |\phi\rangle,$$



also eine Teilchen-Loch-Anregung.

Ähnlich erzeugt $b_A^+ b_B^+ b_a^+ b_b^+$ zwei Teilchen und zwei Löcher etc.

* Allgemeines Prinzip solcher Bogoljubov-Transformationen: Ausgehend von $a_{-\alpha}, a_{\alpha}^+$ definiere unitäre Transformation $U: \mathcal{H}^{F(B)} \rightarrow \mathcal{H}^{F(B)}$

Dann

$$b_{\alpha} = U a_{\alpha} U^{-1}$$

$$b_{\alpha}^+ = U a_{\alpha}^+ U^{-1}$$

(z. B. in einfachen Fällen Linearkombinationen)

Dann gilt

$$[b_{\alpha}, b_{\alpha'}^+]_{(\pm)} = \delta_{\alpha\alpha'} \quad \text{usw.}$$

Definiere dann $\phi = U|0\rangle$ als Quasiteilchenvakuum.

I.a. erhält man durch diese Transformation aus den alten Operatoren $A(a, a^\dagger)$ neue Operatoren $\tilde{A}(b, b^\dagger)$ und ist dann an deren Erwartungswerte $\langle \phi | \tilde{A}(b, b^\dagger) | \phi \rangle$ interessiert.

* Eine mögliche Verallgemeinerung ist die spezielle Bogoljubov-Transformation,

Diese ist oft nützlich, wenn die Einzelteilchenzustände physikalisch sinnvoll zu Paaren zusammengefaßt werden können. Die entsprechenden Zustände der Paare seien α und $\bar{\alpha}$, d.h.

es gilt eine Zuordnung $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ auf \mathcal{H}_1 .

Wir können dann für Fermionen definieren

$$\begin{aligned} b_\alpha &= \sin \gamma_\alpha a_{\bar{\alpha}}^+ + \cos \gamma_\alpha a_\alpha \\ b_{\bar{\alpha}} &= -\sin \gamma_\alpha a_\alpha^+ + \cos \gamma_\alpha a_{\bar{\alpha}} \end{aligned} \quad (\gamma_\alpha \in \mathbb{R})$$

woraus man erhält

$$\begin{aligned} b_\alpha^+ &= \cos \gamma_\alpha a_\alpha^+ + \sin \gamma_\alpha a_{\bar{\alpha}} \\ b_{\bar{\alpha}}^+ &= \cos \gamma_\alpha a_{\bar{\alpha}}^+ - \sin \gamma_\alpha a_\alpha \end{aligned}$$

Wieder gilt dann

$$\{b_{\alpha}^+, b_{\alpha'}\} = \delta_{\alpha\alpha'}$$

und das zugehörige Quasiteilchen-Vakuum ist

$$\phi = \prod_{\alpha} [\cos \gamma_{\alpha} - \sin \gamma_{\alpha} a_{\alpha}^+ a_{\alpha}^+] |0\rangle.$$

Typische Beispiele für solche Paare von Einteilchenzuständen sind.

- in der Kernphysik

$$\alpha = (n, j, l, m)$$

$$\bar{\alpha} = (n, j, l, -m)$$

$$j = l \pm \frac{1}{2}$$

- in der Festkörperphysik

$$\alpha = (\vec{p}, \uparrow)$$

$$\bar{\alpha} = (-\vec{p}, \downarrow)$$

z. B. in der BCS-Theorie der Supraleitung (Bardeen, Cooper, Schrieffer)

[In diesem Fall beschreibt obiges Quasiteilchenvakuum Cooper-Paare.]

Für Bosonen kann man die spezielle Bogoljubov-Transformation in ähnlicher Weise definieren:

$$b_{\alpha} = \sinh \gamma_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} + \cosh \gamma_{\alpha} a_{\alpha}$$

$$b_{\bar{\alpha}} = \sinh \gamma_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} + \cosh \gamma_{\alpha} a_{\bar{\alpha}} \quad (\gamma_{\alpha} \in \mathbb{R})$$

(und hieraus $b_{\alpha}^{\dagger}, b_{\bar{\alpha}}^{\dagger}$ durch Adjungieren)
mit dem Quasiteilchenvakuum

$$\phi = \left(\frac{\pi}{\alpha} \cosh \gamma_{\alpha} \right)^{-1/2} \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \tanh \gamma_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\bar{\alpha}}^{\dagger} \right] |0\rangle$$

Die Transformation

$$b_{\alpha} = a_{\alpha} + \lambda_{\alpha} \cdot \mathbb{1}$$

$$b_{\alpha}^{\dagger} = a_{\alpha}^{\dagger} + \lambda_{\alpha}^* \cdot \mathbb{1} \quad (\lambda_{\alpha} \in \mathbb{C})$$

mit

$$\phi = \exp \left(\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} \right) |0\rangle$$

tritt in der Quantenoptik auf
(\rightarrow kohärente Zustände)

6) Normalprodukte (für Fermionen)

Normalprodukte nennt man solche Operatoren, bei denen die Erzeuger links und die Vernichter rechts stehen. Jeder Operator läßt sich in Normalprodukte entwickeln (siehe unten). Man hat also die Operatorbasis

$$a_{\alpha_1}^+ \dots a_{\alpha_n}^+ a_{\beta_1} \dots a_{\beta_m}$$

Diese Anordnung ist natürlich, da dann - falls $m \neq 0$ - das Vakuum auf Null abgebildet wird.

Für die bzgl. eines Quasiteilchenvakuum ϕ definierten Operatoren b_{α}, b_{α}^+ haben wir "b-Normalprodukte" als natürliche Operatorbasis:

$$b_{\alpha_1}^+ \dots b_{\alpha_n}^+ b_{\beta_1} \dots b_{\beta_m}$$

Dabei ist aber ein nichttrivialer Zustand ϕ ausgezeichnet.

Problem ist dann die Entwicklung eines beliebigen Produkts $B_1 \dots B_n$ mit $B_j = b_{\alpha_j}$ oder $b_{\alpha_j}^+$ nach b -Normalprodukten.

Beispiel: $b_b b_a^+ = \delta_{ab} - b_a b_b^+$.

Die Normalprodukte bzgl. $|0\rangle$ (d.h. für die Operatoren a_α, a_α^+) erhält man dann als Spezialfall für $\phi = |0\rangle$.

Definition: Normalordnung für Fermionen

$$: \dots : : \text{End } \mathcal{H}^F \rightarrow \text{End } \mathcal{H}^F$$

$$B_1 \dots B_n \mapsto : B_1 \dots B_n :$$

mit

$$: B_1 \dots B_n : = \text{sign } \sigma B_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(n)},$$

wobei $\sigma \in S_n$ eine Permutation ist, so daß $B_{\sigma(1)} \dots B_{\sigma(n)}$ ein Normalprodukt.

Diese Permutation ist nicht eindeutig, dies wird aber durch $\text{sign } \sigma$ wieder ausgeglichen. Der normalgeordnete Operator ist von der Wahl der Indizes

unabhängig.

(Für Bosonen: $\text{sign } \sigma$ weglassen!)

Hauptsatz: Wicksche Regel

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_n &= : \mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_n : \\
 &+ \sum_{\mu < \nu} k_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} : \mathcal{B}_1 \dots \hat{\mathcal{B}}_\mu \dots \hat{\mathcal{B}}_\nu \dots \mathcal{B}_n : \\
 &+ \sum_{\substack{\mu_1 < \nu_1 \\ \mu_2 < \nu_2 \\ \mu_1 < \mu_2}} k_{\mu_1 \nu_1} k_{\mu_2 \nu_2} \varepsilon_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} : \mathcal{B}_1 \dots \hat{\mathcal{B}}_{\mu_1} \dots \hat{\mathcal{B}}_{\mu_2} \dots \hat{\mathcal{B}}_{\nu_1} \dots \hat{\mathcal{B}}_{\nu_2} \dots \mathcal{B}_n : \\
 &+ 6 \text{ Terme weglassen} + \text{ usw.} \\
 &+ \dots + \begin{cases} \text{alle weglassen falls } n \text{ gerade} \\ \text{bis auf einen weglassen falls} \\ \text{ } n \text{ ungerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

↓ weglassen!

Dabei ist $k_{\mu\nu}$ die Kontraktion.

$$k_{\mu\nu} = \langle \phi | \mathcal{B}_\mu \mathcal{B}_\nu | \phi \rangle,$$

d.h. der Vakuum Erwartungswert bzgl. des Vakuums ϕ .

Für Bosonen sind $\varepsilon_{\dots} = +1$.

Für Fermionen: $\varepsilon_{\mu\nu} = (-1)^m = (-1)^{\mu+\nu+1}$

wobei m die Zahl der Transpositionen, die μ und ν benachbart machen.

Analog $\varepsilon_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2} = (-1)^m$ mit $m =$ Zahl der Transpositionen, die μ_1 und ν_1 und μ_2 und ν_2 benachbart machen etc.

Beweis der Wick'schen Regel: durch Induktion. $n=2$ läßt sich leicht "durchprobieren". Dann behandelt man mittels der Fälle, daß der zusätzliche Operator im Schritt $n \rightarrow n+1$ ein Erzeuger oder Vernichter ist.

Man schreibt Kontraktionen oft als

$$\overline{B_\mu B_\nu} = \langle \phi | B_\mu B_\nu | \phi \rangle.$$

Die Wick-Regel gibt also eine Entwicklung der Form

$$\begin{aligned} B &= B_1 \dots B_n \\ &= B^{(n)} + B^{(n-2)} + B^{(n-4)} + \dots + B^{(0)} \end{aligned}$$

mit (falls n gerade)

$$B^{(n)} = : B_1 \dots B_n :$$

$$B^{(n-2)} = : B_1 \dots \overline{B_\mu B_\nu} \dots B_n :$$

$$B^{(n-4)} = : B_1 \dots \overline{B \dots B} \dots \overline{B \dots B} \dots B_n :$$

\vdots

$$B^{(0)} \sim \text{Id}$$

↖ vollständige Kontraktion

Die Wick-Regel ist linear und gilt daher auch für B_μ von der Form

$$B_\mu = \alpha_{\mu\nu} b_\nu + \beta_{\mu\nu} b_\nu^+.$$

7) Anwendungen der nicht-relativistischen QFT

In der nicht-rel. QFT lassen sich viele Probleme der Vielteilchentheorie sehr elegant formulieren, die sonst recht mühsam werden.

Ein Beispiel dafür ist die Hartree-Fock-Theorie zum Auffinden des Grundzustands eines fermionischen Systems mittels eines Variationsverfahrens. (Ausschließend kann man auch die Anregungsenergien damit bestimmen.)

Dabei berücksichtigt man das Pauli-Prinzip, indem man für den Grundzustand eine Slater-Determinante ansetzt und diese mit einem

Variationsverfahren optimiert. Diese Variations läßt sich durch Einteilchenoperatoren a_α, a_α^+ formulieren. Es läßt sich dann eine Bedingung herleiten (Hartree-Fock-Gleichung), die ein Eigenwertproblem darstellt, in dem der Operator selbstkonsistent von der Lösung abhängt. Dieses läßt sich in der Praxis oft durch Iteration ausgehend von einem Ansatz lösen.

Für diese und viele weitere interessante und wichtige Anwendungen siehe die Literatur, z.B.

Blair & Ripka,

"Quantum Theory of Finite Systems"