Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, C. Viermann

Universität Heidelberg
Wintersemester 2016/17

6. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 28.–30.11.2016
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 01.12.2016

S 27 Dipol- und Quadrupolmoment eines Ellipsoids (6 Punkte)

Ein Ellipsoid mit Halbachsen $a, b, c > 0$ sei homogen geladen, die Gesamtladung sei Q.

(a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential des Ellipsoids für große Abstände einschließlich des Quadrupolbeitrags.

(b) Geben Sie das Ergebnis für ein axialsymmetrisches Ellipsoid mit $a = b \neq c$ an.

(c) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus (a) für den bekannten Spezialfall der Kugel, $a = b = c$.

Hinweis: Beachten Sie bei der Berechnung des Quadrupoltensors die Symmetrie der Ladungsverteilung. Schreiben Sie x/a, y/b und z/c in sphärischen Polarkoordinaten.

S 28 Gestreckter Quadrupol (4 + 3 Punkte)

Wir betrachten einen gestreckten Quadrupol, d. h. eine Ladungsverteilung bei der sich eine Ladung $-2e$ im Ursprung und jeweils eine Ladung $+e$ in den Punkten $(0, 0, d)$ und $(0, 0, -d)$ befinde.

(a) Geben Sie das Potential dieser Ladungsverteilung an.

(b) Berechnen Sie das Dipolmoment und den Quadrupoltensor für diese Ladungsverteilung. (Vergleichen Sie den Quadrupoltensor mit dem aus Aufgabe 24.)

(c) Geben Sie für den Fall großer Abstände $r = |\boldsymbol{x}| \gg d$ das Potential bis zur zweiten Ordnung in d/r an. Zeigen Sie, dass das Potential rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse ist, also nicht vom Winkel φ abhängt.

(d) Im Folgenden benutzen wir Kugelkoordinaten. (optional, +3 Punkte)

  (i) Berechnen Sie in der Näherung aus (c) das elektrische Feld in Kugelkoordinaten.

  (ii) Geben Sie einen analytischen Ausdruck $r = r(\theta)$ für die Äquipotentialflächen an und skizzieren Sie diese. Skizzieren Sie auch die Feldlinien.

S 29 Separationsansatz für die Laplace-Gleichung (5 Punkte)

Wir betrachten die Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$ in sphärischen Koordinaten r, θ, φ. Zeigen Sie, dass der Separationsansatz

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{u(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi) \tag{1}$$

bei geeigneter Wahl der Separationskonstanten auf die drei Gleichungen

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2 \tag{2}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0 \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] P = 0 \tag{4}$$

führt. Geben Sie die Lösung der ersten Gleichung an und zeigen Sie deren 2π-Periodizität. Leiten Sie mit einem Potenzansatz die allgemeine Lösung der zweiten Gleichung her. Zeigen Sie, dass die dritte Gleichung für den Fall $m = 0$ und bei Wahl einer geeigneten Variablen x auf die Legendresche Differentialgleichung führt.

S 30 Vektorpotential paralleler Ströme (5 + 4 Punkte)

Zwei geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbarem Querschnitt seien im Abstand $2a$ parallel zueinander (z. B. in 3-Richtung) gespannt. Beide Drähte seien von stationären Strömen der Stärke I durchflossen. Berechnen Sie das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ für den Fall, dass die Ströme in den Drähten

(a) in entgegengesetzter Richtung fließen,

(b) in gleicher Richtung fließen.

Hinweis: Beachten Sie einen früheren Hinweis. Es gilt

$$\int \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = \ln\left(\frac{z+\sqrt{z^2+r^2}}{r}\right). \tag{5}$$

(c) (optional, +4 Punkte)
Welche geometrische Form haben für den in (a) betrachteten Fall die Äquipotentiallinien mit konstantem $|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})|$?

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed16.html