Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, C. Viermann

Universität Heidelberg
Wintersemester 2016/17

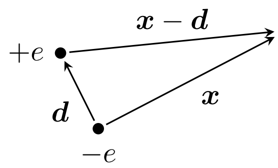
5. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 21.–23.11.2016
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 24.11.2016

S 21 Elektrischer Dipol und Quadrupol (5 + 2 Punkte)

Wir wollen in dieser Aufgabe die in der Vorlesung allgemein durchgeführte Multipolentwicklung konkret für einen elektrischen Dipol und einen elektrischen Quadrupol durchführen.

(a) Betrachten Sie einen elektrischen Dipol aus zwei Ladungen: $-e$ im Ursprung und $+e$ bei $\boldsymbol{d}$, siehe Skizze.



Das Potential ist offensichtlich durch

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = e\left(-\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} + \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}|}\right) \tag{1}$$

gegeben. Wir wollen eine Taylor-Entwicklung für $|\boldsymbol{d}| \ll |\boldsymbol{x}| = r$ durchführen.

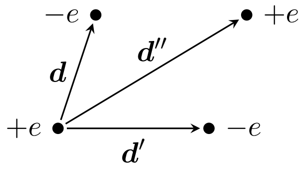
(i) Nutzen Sie die mehrdimensionale Taylor-Formel, um φ für kleine $\boldsymbol{d}$ zu entwickeln. Zeigen Sie, dass das Monopolmoment verschwindet und dass die führende Multipolordnung das Potential des Dipols ist,

$$\varphi_{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}{r^3}\,, \tag{2}$$

worin $\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{d}$ das *elektrische Dipolmoment* ist. Berechnen Sie auch das resultierende Dipolfeld $\boldsymbol{E}_{(1)}(\boldsymbol{x})$. Wie fallen $\varphi_{(1)}(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{E}_{(1)}(\boldsymbol{x})$ für große r ab?

(ii) (optional, +2 Punkte)
Nun seien die Koordinaten so gewählt, dass $\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{e_z}$. Drücken Sie die (kartesischen) Komponenten von $\boldsymbol{E}_{(1)}$ in Kugelkoordinaten (r, φ, θ) aus.

(b) Betrachten Sie einen elektrischen Quadrupol mit vier betragsgleichen Ladungen, die als Parallelogramm angeordnet sind, siehe Skizze.



Es gilt $\boldsymbol{d}'' = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}'$. Der Ursprung liege im unteren linken Punkt. Das Potential ist

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}|} - \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}'|} + \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}''|}\right). \tag{3}$$

(i) Zeigen Sie, dass in der Taylor-Entwicklung in $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}'$ und $\boldsymbol{d}''$ Monopol- und Dipolordnung verschwinden. Führen Sie den symmetrischen Tensor $\hat{q}_{kl} = 3e(d_k d'_l + d'_k d_l)$ als Hilfsgröße ein und zeigen Sie, dass die führende Multipolordnung gegeben ist durch

$$\varphi_{(2)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6}\sum_{k,l=1}^{3} \hat{q}_{kl}\,\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\frac{1}{r}. \tag{4}$$

(ii) Zeigen Sie, dass $\varphi_{(2)}(\boldsymbol{x})$ unverändert bleibt, wenn wir $\hat{q}_{kl}$ durch Addition eines Terms $a\delta_{kl}$, $a \in \mathbb{R}$, modifizieren.
Hinweis: Da wir am „Fernfeld“ $r \gg |\boldsymbol{d}|$ interessiert sind, können Sie $r \neq 0$ annehmen.

(iii) Bestimmen Sie a so, dass $q_{kl} = \hat{q}_{kl} + a\delta_{kl}$ symmetrisch und spurfrei (und damit ein irreduzibler Tensor) ist. Geben Sie q_{kl} und $\varphi_{(2)}(\boldsymbol{x})$ explizit an. Wie fällt $\varphi_{(2)}(\boldsymbol{x})$ für große r ab?

S 22 Earnshaw-Theorem (optional, +4 Punkte)

Wir wollen das Earnshaw-Theorem beweisen: Eine beliebige Konfiguration von Punktladungen kann sich nicht in einem stabilen Gleichgewicht befinden.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass im ladungsfreien Raum der Wert des elektrostatischen Potentials φ am Ort $\boldsymbol{x}$ gleich dem Mittelwert von φ über eine beliebige Kugeloberfläche mit Mittelpunkt $\boldsymbol{x}$ ist, d. h. für jedes $R > 0$ gilt

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_R(\boldsymbol{x})} \varphi(\boldsymbol{x}')\, d\Omega', \tag{5}$$

wobei $B_R(\boldsymbol{x})$ die Kugel vom Radius R mit Mittelpunkt $\boldsymbol{x}$ ist. Dies nennt man die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.
Hinweis: Benutzen Sie das Greensche Theorem mit $\phi = \varphi$ und $\psi = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^{-1}$.

(b) Benutzen Sie diese Mittelwerteigenschaft, um das Earnshaw-Theorem herzuleiten. Betrachten Sie dazu eine der Punktladungen und zeigen Sie, dass sich diese nicht in einem strengen lokalen Minimum des Potentials befinden kann.

P 23 Multipolmomente & Translation und Parität (+5 Punkte)

Das Dipolmoment $\boldsymbol{p}$ und der (kartesische) Quadrupoltensor (q_{kl}) einer Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{x})$ bezüglich des Punkts $\boldsymbol{x} = 0$ sind gegeben durch

$$\boldsymbol{p} = \int \rho(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{x}\, d^3x\,, \tag{6}$$

$$q_{kl} = \int \rho(\boldsymbol{x})(3x_k x_l - \boldsymbol{x}^2 \delta_{kl})\, d^3x\,. \tag{7}$$

(a) Betrachten Sie eine Translation des Koordinatensystems $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$. Wie verhalten sich Gesamtladung, Dipolmoment und Quadrupoltensor unter einer solchen Translation? Drücken Sie insbesondere q'_{kl} durch q_{kl}, die Gesamtladung und die Komponenten p_k des Dipolmoments aus. Unter welchen Umständen ist $q'_{kl} = q_{kl}$?

(b) Wie verhalten sich Gesamtladung, Dipolmoment und Quadrupoltensor unter einer Paritätstransformation, also einer Raumspiegelung $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}$?

Hinweis: Die Ladungsdichte transformiert sich in beiden Fällen gemäß $\rho'(\boldsymbol{x}') = \rho(\boldsymbol{x})$.

S 24 Arbeit im elektrischen Feld, Ladung und Dipol im Quadrupolfeld

(4 Punkte)

Wir betrachten die Bewegung einer Ladung im elektromagnetischen Feld. Die im Zeitelement dt vom Feld an der Ladung geleistete Arbeit dW ist durch die Lorentz-Kraft $\boldsymbol{F}$ bestimmt,

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\, dt\,, \tag{8}$$

wobei $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{x}/dt$.

(a) Bestimmen Sie diese Arbeit und damit die Leistung für eine Punktladung. Welche Arbeit leistet dabei das magnetische Feld?

(b) Bestimmen Sie in analoger Weise die Leistung für eine Ladungsverteilung ρ aus der Kraftdichte der Lorentz-Kraft.

Im Ursprung befinde sich nun ein elektrischer Quadrupol, dessen kartesischer Quadrupoltensor nur drei nichtverschwindende Komponenten habe: $q_{11} = q_{22} = -2\zeta$, $q_{33} = 4\zeta$, wobei ζ eine Konstante der Dimension $[\zeta] = (\text{Ladung})(\text{Länge})^2$ sei.

(c) Berechnen Sie die Arbeit, die man leistet, wenn man eine elektrische Ladung Q vom Punkt $(0, 0, \infty)$ zum Punkt $(0, 0, a)$ bringt.

(d) Welche Arbeit leistet man, wenn man einen elektrischen Dipol mit Dipolmoment $\boldsymbol{p} = p\, \boldsymbol{e}_3$ auf demselben Weg transportiert?

Hinweis: Das statische elektrische Feld des Quadrupols ist konservativ.

S 25 Wechselwirkung zweier Dipole (5 Punkte)

Ein elektrischer Dipol mit Dipolmoment $\boldsymbol{p}_1$ befinde sich im Ursprung, ein zweiter elektrischer Dipol mit Dipolmoment $\boldsymbol{p}_2$ bei $\boldsymbol{x} = (R, 0, 0)$. Berechnen Sie Kraft und Drehmoment, die die Dipole aufeinander ausüben, sowie die potentielle Energie für die Fälle, dass

(a) die Dipole parallel bzw. antiparallel in x-Richtung ausgerichtet sind,

(b) die Dipole parallel bzw. antiparallel in z-Richtung ausgerichtet sind.

In welchen dieser Fälle ziehen sich die Dipole an, wann stoßen sie sich ab?

S 26 Fourier-Transformation (6 Punkte)

Wir betrachten (i. Allg. komplexwertige) Funktionen f einer reellen Variablen, von denen wir annehmen, dass sie absolut integrierbar (d. h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$) und stetig differenzierbar sind.
Die Fourier-Transformation einer solchen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x); k] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx} f(x)\,. \tag{9}$$

Die inverse Transformation ist dann

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx} \tilde{f}(k)\,. \tag{10}$$

Seien f, g zwei Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x); k] = \alpha\, \mathcal{F}[f(x); k] + \beta\, \mathcal{F}[g(x); k]\,, \tag{11a}$$

$$\mathcal{F}[f(x-a); k] = e^{-ika}\, \mathcal{F}[f(x); k]\,, \tag{11b}$$

$$\mathcal{F}[f(ax); k] = \frac{1}{a}\, \mathcal{F}\left[f(x); \frac{k}{a}\right], \quad \text{mit } a > 0\,, \tag{11c}$$

$$\mathcal{F}[f(-x); k] = \mathcal{F}[f(x); -k]\,, \tag{11d}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx} f(x); k\right] = ik\, \mathcal{F}[f(x); k]\,, \tag{11e}$$

$$\mathcal{F}[x f(x); k] = i \frac{d}{dk}\, \mathcal{F}[f(x); k]\,. \tag{11f}$$

Bemerkung: Man kann die Fourier-Transformation in natürlicher Weise auf Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ erweitern. Dann gelten zu (11a)–(11f) analoge Relationen. Man beachte allerdings, dass in diesem Fall in (11c) der Skalierungsfaktor nun $1/a^3$ ist und dass die Gleichungen (11e) und (11f) komponentenweise formuliert werden müssen.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed16.html