
2. ÜBUNG ZUR ELEKTRODYNAMIK

Besprechung der Präsenzaufgaben: 31.10.2016, 02.11.2016 und nach Absprache
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 03.11.2016

P/S 4 Vektoranalysis II

(+2 Punkte, 5 Punkte)

Es seien $\phi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x})$ skalare Funktionen, $\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x})$ Vektorfelder, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ ein konstanter Vektor, und $r = |\mathbf{x}|$.

P(a) Zeigen Sie

$$\text{grad}(\phi\psi) = \phi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \phi \quad (1)$$

$$\text{div}(\phi\mathbf{a}) = \phi \text{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \text{grad} \phi. \quad (2)$$

S(b) Zeigen Sie zwei der Identitäten

$$\text{rot}(\phi\mathbf{a}) = \phi \text{rot} \mathbf{a} + (\text{grad} \phi) \times \mathbf{a} \quad (3)$$

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \text{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot} \mathbf{b} \quad (4)$$

$$\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \text{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b} \text{grad}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \text{grad}) \mathbf{b} \quad (5)$$

$$\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{a} + (\mathbf{b} \text{grad}) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \text{grad}) \mathbf{b}. \quad (6)$$

Hierbei sei

$$(\mathbf{a} \text{grad}) = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (7)$$

Hinweis: Es kann günstig sein, die Summenkonvention zu benutzen. In dieser ist das Kreuzprodukt gegeben durch

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = \epsilon_{klm} a_l b_m, \quad (8)$$

wobei der ϵ -Tensor definiert ist durch

$$\epsilon_{klm} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (k, l, m) \text{ gerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{falls } (k, l, m) \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (9)$$

Es gilt

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (10)$$

S(c) Berechnen Sie

$$\text{div} \frac{\mathbf{x}}{r^3}, \quad \text{rot} \frac{\mathbf{x}}{r^3}, \quad (11)$$

sowie (mindestens) zwei der Ausdrücke

$$\text{grad} \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}}{r^3}, \quad \text{div} \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{x}}{r^3}, \quad \text{rot} \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{x}}{r^3}, \quad \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}|}. \quad (12)$$

P/S 5 Zweifache Ableitungen, Laplace-Operator

(+1 Punkt, 5 Punkte)

Der *Nabla-Operator* ist definiert durch

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (13)$$

P(a) Schreiben Sie die Identitäten der Aufgaben 4 a) und b) mit Hilfe des Nabla-Operators ∇ .S(b) Berechnen Sie $\nabla \times \nabla$. Zeigen Sie für eine skalare Funktion $\phi(\mathbf{x})$ und ein Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{x})$

$$\text{rot grad } \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (14)$$

$$\text{div rot } \mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0. \quad (15)$$

Der *Laplace-Operator* Δ ist definiert durch

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (16)$$

S(c) Überzeugen Sie sich, dass für eine skalare Funktion $\phi(\mathbf{x})$

$$\Delta \phi(\mathbf{x}) = \text{div grad } \phi(\mathbf{x}) \quad (17)$$

und zeigen Sie für die skalaren Funktionen $\phi(\mathbf{x})$ und $\psi(\mathbf{x})$

$$\Delta(\phi\psi) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2(\text{grad } \phi) \cdot (\text{grad } \psi). \quad (18)$$

S(d) Benutzen Sie die Ihnen bekannte Formel $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, um zu zeigen, dass

$$\Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \text{grad div } \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \text{rot rot } \mathbf{a}(\mathbf{x}). \quad (19)$$

P/S 6 Ladungsverteilungen

(+2 Punkte, 5 Punkte)

P(a) Drücken Sie die folgenden Ladungsverteilungen mit Hilfe der Delta- und Theta-Funktion in den jeweils angegebenen Koordinaten aus:

- (i) eine Punktladung Q an der Stelle $(r_0, \varphi_0, \theta_0)$ in Kugelkoordinaten;
Hinweis: Überprüfen Sie die Normierung.
- (ii) eine Ladung Q , die gleichmäßig auf einer Kugeloberfläche des Radius R verteilt ist (Kugelkoordinaten);
- (iii) auf der Mantelfläche eines Zylinders der Länge $2a$ wird pro Längeneinheit eine Ladung λ gleichmäßig verteilt (Zylinderkoordinaten);
- (iv) eine Ladung Q , gleichmäßig auf einer unendlich dünnen Scheibe des Radius R verteilt (Zylinderkoordinaten).

S(b) Eine elektrische Ladungsverteilung sei gegeben durch die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \quad (20)$$

mit $r = |\mathbf{x}|$ und reellen Parametern $\rho_0 \neq 0$, $a > 0$.

(i) Bestimmen Sie die Gesamtladung

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) \, d^3x. \quad (21)$$

(ii) Berechnen Sie den RMS-Radius $r_{\text{RMS}} = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$, worin

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Q} \int_{\mathbb{R}^3} r^2 \rho(\mathbf{x}) \, d^3x. \quad (22)$$

(RMS steht für *root mean square*.)

(iii) Wie hängt r_{RMS} von ρ_0 und a ab? Wie ist der Grenzfall $a \rightarrow 0$ zu interpretieren?

S 7 Wirkung der Lorentzkraft

(optional, +3 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m und der Ladung q wird aus der Ruhelage durch ein konstantes elektrisches Feld $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_1$ auf einer Strecke der Länge l beschleunigt. Nach dem Austritt aus dem elektrischen Feld wird es durch ein konstantes Magnetfeld $\mathbf{B} = -B_0 \mathbf{e}_3$ auf eine Kreisbahn gezwungen. Welchen Radius hat die Kreisbahn? Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Kreises, wenn der Eintritt in das magnetische Feld im Ursprung des Koordinatensystems liegt.

Weitere Informationen unter:

<http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed16.html>